WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

3. Februar 2015

Modulklausur Computeralgebra

Aufgabe 1: (*7 Punkte*)

a) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 2015 und 1989 als Linearkombination dieser beiden Zahlen dar!

b) Bestimmen Sie alle Paare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, für die $2015x + 1989y = 65$ ist!

c) Bestimmen Sie alle Paare $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, für die $2015u + 1989v = 165$ ist!

d) Finden Sie eine natürliche Zahl $z \in \mathbb{N}$ mit $z \equiv 82 \bmod 153$ und $z \equiv 79 \bmod 155$. *(Hinweis: Auch dafür können Sie a) verwenden.)*

Aufgabe 2: (*7 Punkte*)

a) Für welche Werte von Y haben die beiden Polynome $f = X^2 + XY + Y$ und $g = X^2 - Y^2$ aus $\mathbb{Q}[X, Y]$ einen gemeinsamen Faktor positiven Grades?

b) Geben Sie diesen Faktor jeweils an!

c) Bestimmen Sie alle Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x, y) = g(x, y) = 0$ ist!

Aufgabe 3: (*10 Punkte*)

a) Welche Bedingungen muß eine Teilmenge $I \subseteq R$ eines Rings erfüllen, um ein Ideal zu sein?

b) Welche der folgenden Teilmengen sind Ideale in $\mathbb{Z}[X]$? (Bei den angegebenen Polynomen soll stets d beliebig und $a_d \neq 0$ sein.)

$$M_1 = \mathbb{Z}, \quad M_2 = \mathbb{Z}[X^2], \quad M_3 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; \text{alle } a_i \text{ sind gerade} \right\},$$

$$M_4 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; \sum_{i=0}^{d} a_i \text{ ist gerade} \right\}, \quad M_5 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; \sum_{i=0}^{d} a_i \text{ ist ungerade} \right\}$$

$$M_6 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; a_0 \text{ ist gerade} \right\}, \quad M_7 = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \;\middle|\; a_d \text{ ist gerade} \right\},$$

c) Geben Sie in allen Fällen, in denen M_i ein Ideal ist, ein möglichst einfaches Erzeugendensystem dieses Ideals an!

Aufgabe 4: (*9 Punkte*)

Wir betrachten das Polynom $f = 12X^3 + 30X^2 + 18X + 6 \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Bestimmen Sie den Inhalt und den primitiven Anteil von f!

b) Zeigen Sie, daß $f^{(5)} = f \bmod 5 \in \mathbb{F}_5[X]$ irreduzibel ist!

c) Zerlegen Sie f in $\mathbb{Z}[X]$ in seine irreduziblen Faktoren!

d) Zerlegen Sie f in $\mathbb{Q}[X]$ in seine irreduziblen Faktoren!

e) Für welche Primzahlen p ist die SYLVESTER-Matrix von $f^{(p)}$ und $f(p)'$ gleich der SYLVESTER-Matrix von f und f' modulo p?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 5: *(18 Punkte)*
Wir betrachten das Ideal $I = (f, g)$ mit

$$f = (X-1)^2 + Y^2 - 25 \quad \text{und} \quad g = (X-1)Y - 12$$

im Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y]$.

a) Zeigen Sie, daß g bezüglich jeder Monomordnung (auch solcher, die nicht in der Vorlesung behandelt wurden) denselben führenden Term hat!

b) Geben Sie für jeden Term von f, der als führender Term bezüglich einer Monomordnung auftreten kann, eine entsprechende Monomordnung an!
Im folgenden arbeiten wir mit der lexikographischen Ordnung mit $X > Y$.

c) Berechnen Sie das S-Polynom von f und g und bestimmen Sie seinen Rest h bei der Division durch f und g!

d) Berechnen Sie das S-Polynom k von g und h!

e) Zeigen Sie, daß h und k eine GRÖBNER-Basis des Ideal (h, k) in $\mathbb{Q}[X, Y]$ bilden, und bestimmen Sie die zugehörige reduzierte Basis!

f) Warum ist $(h, k) \subseteq (f, g)$?

g) Zeigen Sie, daß sogar $(h, k) = (f, g)$ ist!

h) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f und g!

i) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

Aufgabe 6: *(9 Punkte)*
Wir betrachten $f = X^4 - 5X^3 - 12X^2 + 22X - 8 \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Man kann zeigen, daß $f \equiv (X^2 + 2X + 3)(X^2 + 3X + 4) \bmod 5$ ist, wobei beide Faktoren in $\mathbb{F}_5[X]$ irreduzibel sind. Was folgt daraus über die Anzahl und den Grad möglicher Faktoren von f in $\mathbb{Z}[X]$?

b) Wie lassen sich Polynome $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ konstruieren, für die $f \equiv g \cdot h \bmod 25$ ist? (Die Beschreibung des Rechengangs genügt!)

c) Wie sich zeigt, ist $f \equiv (X^2 + 2X + 23)(X^2 + 18X + 4) \bmod 25$. Zerlegen Sie f in $\mathbb{Z}[X]$ in seine irreduziblen Faktoren!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 3. Februar 2015, um 17.30 Uhr