Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 22.+23. April 2013

a) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = x - |x|$!

b) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = x - [x]$!

c) Bestimmen Sie den Träger der Funktion $f(x) = \sin x - |\sin x|$!

d) Welche der Funktionen aus den vorigen drei Aufgaben hat kompakten Träger?

e) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt auch die Funktion $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ in $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

f) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt der Träger von h in der Vereinigung der Träger von f und von g.

g) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist der Träger von h die Vereinigung der Träger von f und von g.

h) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Berechnen Sie $\int_Q f$ für das Quadrat Q mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$!

i) Berechnen Sie auch $\int_Q g$ für $g(x, y) = \max\{0, f(x, y)\}$, und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch!

j) Existiert $\int_{\mathbb{R}^n} g$?

k) Stellen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \int\limits_1^2 \frac{\cos(x + t)}{x^2 + t^2}\, dt$ als Integral dar!

l) Zeigen Sie, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig darstellen läßt in der Form $\frac{1}{2}m(m+1)+\ell$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le \ell \le m + 1$, und folgern Sie, daß die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(k, \ell) = \frac{1}{2}(k + \ell - 2)(k + \ell - 1) + \ell$ bijektiv ist!

m) Zeigen Sie mit Hilfe der Abbildung φ, daß für zwei abzählbar unendliche Mengen A und B auch die Menge $A \times B$ abzählbar unendlich ist! und daß auch für jede natürliche Zahl n A^n abzählbar unendlich ist!

n) Folgern Sie, daß für eine abzählbar unendliche Menge A und eine natürliche Zahl n auch A^n abzählbar unendlich ist!

o) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Nullmengen?

$$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \qquad B = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}, \qquad C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x + y \in \mathbb{Q}\big\},$$
$$D_a = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| |xy| < a\big\} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

p) *Richtig oder falsch:* Sind $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ Nullmengen, so ist auch $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge.