WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, ZIMMER C 201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 15+16. April 2013

*a) Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert auf dem abgeschlossenen Intervall $[-10, 10]$ gleichmäßig gegen $e^x$.

**Lösung:** Nach dem Satz über die TAYLOR-Entwicklung ist

$$e^x = f_n(x) + R_{n+1}(\xi) \quad \text{mit} \quad R_{n+1}(\xi) = \frac{\xi^{n+1} e^{\xi}}{(n+1)!}$$

für ein $\xi$ zwischen Null und $x$. Für $x \in [-10, 10]$ liegt insbesondere auch $\xi$ in diesem Intervall; also ist wegen der Monotonie der Exponentialfunktion

$$|e^x - f_n(x)| = |R_{n+1}(\xi)| \leq \frac{10^{n+1} e^{10}}{(n+1)!} .$$

Die rechte Seite ist unabhängig von $x$ und definiert für $n \to \infty$ eine Nullfolge, denn für $n \geq 20$ ist

$$\frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{10^{20}}{20!} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{10}{22} \cdots \frac{10}{n+1} \leq \frac{10^{20}}{20!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-19} .$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|e^x - f_n(x)| = |R_{n+1}(\xi)| \leq \frac{10^{n+1} e^{10}}{(n+1)!} < \varepsilon$$

ist für alle $x \in [-10, 10]$ und alle $n \geq N$. Dies zeigt die gleichmäßige Konvergenz.

*b)* Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion?

**Lösung:** *Nein;* $f_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad $n$; daher ist $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$, je nach Parität von $n$. Da $|e^x| \leq 1$ für alle $x \leq 0$, wächst $|e^x - f_n(x)|$ daher unbegrenzt für $x \to -\infty$.

*c)* $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, und für ein (nicht notwendigerweise endliches) abgeschlossenes Intervall $I \subseteq D$ sei $f(I) \subseteq I$. Außerdem gebe es eine reelle Zahl $M < 1$, so daß $|f'(x)| \leq M$ ist für alle $x \in I$. Zeigen Sie, daß es dann genau ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$!

**Lösung:** Zu je zwei Punkten $x \neq y$ aus $I$ gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi$ zwischen $x$ und $y$, so daß

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi)$$

ist. Da $I$ ein Intervall ist, liegt mit $x$ und $y$ auch $\xi$ in $I$, also ist $|f'(\xi)| \leq M < 1$. Somit ist

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq M, \quad \text{also} \quad |f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y| .$$

Da $M < 1$ ist, erfüllt $f$ auf $I$ die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes, aus dem die Behauptung folgt.

*d)* Was liefert Ihnen die vorige Aufgabe für die Konvergenz des Verfahrens von HERON?

**Lösung:** Die Abbildung, um die es hier geht, ist natürlich
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) ,$$
wobei $a > 0$ die reelle Zahl ist, deren Wurzel wir berechnen wollen. $f(x)$ ist offensichtlich nicht definiert für $x = 0$. Um zu zeigen, daß sie die Kontraktionseigenschaft aus dem BANACHschen Fixpunktsatz erfüllt, können wir, wie wir oben gesehen haben, die Ableitung
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$
betrachten; sie ist offensichtlich nicht nach unten beschränkt für $x \to 0$. Da $a$ und $x^2$ positiv sind, ist sie aber nach oben beschränkt durch $\frac{1}{2}$. Der Betrag ist daher genau dann kleiner als eins, wenn $f'(x) > -1$ ist, also
$$\frac{a}{x^2} < 3 \quad \text{oder} \quad x^2 > \frac{a}{3} .$$
Da wir eine abgeschlossene Menge brauchen und eine *Schranke,* die echt kleiner als eins ist, müssen wir also ein $b > \sqrt{a/3}$ wählen und uns auf die Menge aller reeller Zahlen größer oder gleich $x$ beschränken. Dabei muß $b$ natürlich so sein, daß $f(x)$ für alle $x \geq b$ wieder größer oder gleich $b$ ist. Eine naheliegende Möglichkeit ist etwa $b = \sqrt{a/2}$. Mit der Schranke gibt es keine Probleme; wir müssen nur sehen, daß für $x \geq \sqrt{b/2}$ auch $f(x) \geq \sqrt{b/2}$ ist. Das ist aber klar, die wie wir im letzten Semester gesehen haben, ist beim HERON-Verfahren $f(x) > \sqrt{a}$ für alle positiven $x < \sqrt{a}$.

*e)* Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = e^{-x^2} - x$ genau eine Nullstelle hat, und geben Sie eine Folge an, die gegen diese Nullstelle konvergiert!

**Lösung:** Wir betrachten die Funktion $g(x) = e^{-x^2}$ und wenden darauf den Satz aus der vorletzten Aufgabe an: $g'(x) = -2xe^{-x^2}$ geht für $x \to \pm\infty$ gegen Null, denn $e^{x^2}$ wächst schneller als jedes Polynom. Um die lokalen Extrema von $g$ zu bestimmen, leiten wir noch einmal ab:
$$g''(x) = -2e^{-x^2} + (2x)^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$
verschwindet für $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ und
$$g'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mp\sqrt{2}e^{-1/2} = \mp\sqrt{\frac{2}{e}} .$$
Somit ist $|g'(x)| \leq M = \sqrt{2/e} < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, Nach der vorletzten Aufgabe erfüllt $g$ somit die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes; es gibt also genau einen Fixpunkt, d.h. genau eine Nullstelle von $f$, und diese ist z.B. der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = e^{-x_n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

*f)* *Richtig oder falsch:* $V$ sei ein BANACH-Raum, und die Abbildung $f\colon V \to V$ erfülle die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes. Dann ist $f$ gleichmäßig stetig auf $V$.

**Lösung:** Es gibt also eine reelle Zahl $q \in [0, 1)$, so daß $\|f(y) - f(x)\| \leq q\,\|y - x\|$ ist für alle $x, y \in V$. Falls $q = 0$ ist, ist $f$ konstant, also gleichmäßig stetig. Andernfalls sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\delta = \varepsilon/q$. Für zwei Punkte $x, y \in V$ mit $\|y - x\| < \delta$ ist dann
$$\|f(y) - f(x)\| \leq q\,\|y - x\| < q\delta = q\frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon .$$
Dies zeigt die gleichmäßige Stetigkeit von $f$.

*g)* $V$ sei ein vollständiger normierter Vektorraum, und die Abbildung $f\colon V \to V$ erfülle für alle $x, y \in V$ und ein festes $q \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\|f(x) - f(y)\| \le q\,\|x - y\|$. Weiter sei $x^*$ ein Fixpunkt von $f$, $x_0 \in V$ ein beliebiger Punkt, und für $k \in \mathbb{N}$ sei $x_k$ rekursiv definiert durch $x_k = f(x_{k-1})$. Zeigen Sie:

$$\|x^* - x_k\| \le \frac{q^k}{1-q}\,\|x_1 - x_0\| \,.$$

**Lösung:** Nach dem BANACHschen Fixpunktsatz konvergiert die Folge der $x_k$ gegen $x^*$. Für jeden Index $j$ ist wegen Kontraktionseigenschaft

$$\|x_{j+1} - x_j\| \le q\,\|x_j - x_{j-1}\| \le q^2\,\|x_{j-1} - x_{j-2}\| \le \cdots \le q^j\,\|x_1 - x_0\| \;;$$

daher ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ nach der Dreiecksungleichung und der Summenformel für geometrische Reihen

$$\begin{aligned}\|x_m - x_k\| &= \left\|\sum_{j=k}^{m-1}(x_{j+1} - x_j)\right\| \le \sum_{j=k}^{m-1}\|x_{j+1} - x_j\| \le \sum_{j=k}^{m-1} q^j\,\|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{q^k - q^m}{1-q}\,\|x_1 - x_0\| \le \frac{q^k}{1-q}\,\|x_1 - x_0\| \,.\end{aligned}$$

Da die Folge der $x_m$ gegen $x^*$ konvergiert, konvergiert die Folge $(x_m - x_k)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $x^* - x_k$; wegen der Stetigkeit der Norm konvergiert dann auch die Folge der Normen $\|x_m - x_k\|$ gegen $\|x^* - x_k\|$. Wie wir gerade nachgerechnet haben, ist jedes einzelne Folgenglied kleiner oder gleich $q^k/(1-q)$, also auch der Grenzwert.

*h)* Berechnen Sie für $f_0(x) \equiv 1$ die ersten Glieder der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f_{n-1}(t) - 2\big)\,dt \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und erraten Sie den Grenzwert!

**Lösung:**

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 1 + \int_0^x 2t\cdot\big(f_0(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x (-2t)\,dt = 1 - x^2 \\ f_2(x) &= 1 + \int_0^x 2t\cdot\big(f_1(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x 2t(-1 - t^2)\,dt = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} \\ f_3(t) &= 1 + \int_0^x 2t\cdot\big(f_2(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x 2t(-1 - t^2 - \tfrac{1}{2}t^4)\,dt = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\,.\end{aligned}$$

Dies sieht nach Fakultäten im Nenner aus, allerdings sind die Exponenten doppelt so groß wie bei der Exponentialfunktion und auch die Vorzeichen sind, abgesehen vom ersten, minus statt plus. Also müssen wir $e^{x^2}$ betrachten und dies geeignet modifizieren:

$$-e^{x^2} = -1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} - \cdots \quad\Longrightarrow\quad 2 - e^{x^2} = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} - \cdots \,.$$

Wir vermuten daher den Grenzwert $f(x) = 2 - e^{x^2}$.

*i)* Zeigen Sie, daß die erratene Funktion die Gleichungen

$$f(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f(t) - 2\big)\,dt \quad \text{und} \quad f'(x) = 2x\big(f(x) - 2\big)$$

erfüllt!

**Lösung:**

$$1 + \int_0^x 2t\big(f(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x 2t(2 - e^{t^2} - 2)\,dt = 1 - \int_0^x 2te^{t^2}\,dt\,.$$

Die Ableitung von $e^{x^2}$ ist $2xe^{x^2}$, also ist dies gleich

$$1 - e^{x^2} + 1 = 2 - e^{x^2}\,.$$

Die Aussage über die Ableitung rechnet man sofort nach, denn

$$f'(x) = -2xe^{x^2} \quad \text{und} \quad 2x\big(f(x) - 2\big) = 2x(-e^{x^2})\,.$$

*j)* Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0} = \big\{x \in \mathbb{R} \;\big|\; x \geq 0\big\}$ keinen Fixpunkt hat, daß aber trotzdem gilt: $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ für alle $x \neq y$ aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$! Warum widerspricht dies nicht dem BANACHschen Fixpunktsatz?

**Lösung:** Für einen Fixpunkt $x$ von $f$ wäre

$$x = f(x) = x + \frac{1}{1+x}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{1+x} = 0\,.$$

Das ist offensichtlich nicht möglich. Trotzdem ist für alle $x \neq y$ aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &= \left|y - x + \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+x}\right| = \left|y - x + \frac{(1+x) - (1+y)}{(1+x)(1+y)}\right| \\ &= |y - x|\left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+y)}\right) < |y - x|\,.\end{aligned}$$

Dies widerspricht nicht dem BANACHschen Fixpunktsatz, denn da $x$ und $y$ beliebig groß werden können, kommt der Ausdruck in der Klammer der Eins beliebig nahe; es gibt also kein $q < 1$, so daß $|f(y) - f(x)| \leq q\,|y - x|$ wäre. So ein $q$ gibt es nur, wenn wir uns auf ein nach oben beschränktes Intervall beschränken; da $f(x) > x$ für alle $x \geq 0$ wird ein solches Intervall aber von $f$ nicht auf sich selbst abgebildet.

*k)* $V$ sei ein BANACH-Raum, $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung auf $D \subseteq V$ und $K \subseteq D$ eine kompakte Teilmenge mit $f(K) \subseteq K$. Zeigen Sie: Wenn $\|f(y) - f(x)\| < \|y - x\|$ für alle $x, y \in K$, hat $f$ mindestens einen Fixpunkt auf $K$.
*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz über Maxima und Minima auf kompakten Mengen.

**Lösung:** Die stetige Abbildung $x \mapsto \|f(x) - x\|$ nimmt auf $K$ ihr Minimum $d$ an. Ist $d = 0$, so gibt es ein $x \in K$ mit $\|f(x) - x\| = 0$, also $f(x) = x$, und wir sind fertig.

Andernfalls ist $d > 0$, und das Minimum werde angenommen im Punkt $x \in K$. Dann ist also $\|f(x) - x\| = d$ und $\big\|f\big(f(x)\big) - f(x)\big\| < \|f(x) - x\| = d$, im Widerspruch zur Minimalität von $d$. Somit kann dieser Fall nicht eintreten, d.h. wir haben immer einen Fixpunkt.

*l)* Q sei das Rechteck mit Ecken $(0,0)$ und $(\pi,4)$. Berechnen Sie die folgenden Integrale jeweils für beide möglichen Anordnungen der Variablen $x$ und $y$:

$$\int_Q xy, \qquad \int_Q y\sin 2x, \qquad \int_Q xye^{2x}, \qquad \int_Q (2-3y\sin xy)\,!$$

**Lösung:**

$$\int_Q xy = \int_0^4\left(\int_0^\pi xy\,dx\right)dy = \int_0^4\left(\frac{\pi^2}{2}y - \frac{0^2}{2}y\right)dy = \frac{\pi^2}{2}\frac{y^2}{2}\bigg|_0^4 = 4\pi^2 \qquad \textit{bzw.}$$

$$\int_Q xy = \int_0^\pi\left(\int_0^4 xy\,dy\right)dx = \int_0^\pi\left(\frac{4^2}{2}x - \frac{0^2}{2}x\right)dx = 8\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^\pi = 4\pi^2$$

$$\int_Q y\sin 2x = \int_0^4\left(\int_0^\pi y\sin 2x\,dx\right)dy = \int_0^4 y\left(\frac{-\cos 2\pi}{2} - \frac{-\cos 0}{2}\right)dy = \int_0^4 0\,dy = 0 \qquad \textit{bzw.}$$

$$\int_Q y\sin 2x = \int_0^\pi\left(\int_0^4 y\sin 2x\,dy\right)dx = \int_0^\pi\left(\frac{4^2}{2}\cdot\sin 2x\right)dx = 8\cdot\frac{-\cos 2x}{2}\bigg|_0^\pi$$

$$= -4\cos 2\pi + 4\cos 0 = 0$$

$$\int_Q xye^2x = \int_0^4\left(\int_0^\pi xye^{2x}\,dx\right)dy = \int_0^4 y\cdot\left(\int_0^\pi xe^{2x}\,dx\right)dy$$

Vom Integral in der Klammer kennen wir keine Stammfunktion; um es zu berechnen, verwenden wir die Regel zur *partiellen Integration*

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx \qquad u' = e^{2x},\ u = \frac{e^{2x}}{2}, \quad v = x, \quad v' = 1$$

und erhalten

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4}\,.$$

Somit ist $\displaystyle\int_0^\pi xe^{2x}\,dx = \frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{4} - \frac{-1}{4} = \frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{4} + \frac{1}{4}$ und

$$\int_Q xye^{2x} = \int_0^4 y\left(\frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{4} + \frac{1}{4}\right)dy = (4\pi-2)e^{2\pi} + 2\,.$$

Bei der anderen Integrationsreihenfolge rechnen wir

$$\int_Q xye^2x = \int_0^\pi\left(\int_0^4 xye^{2x}\,dy\right)dx = \int_0^\pi\frac{4^2}{2}xe^{2x}\,dx = 8\int_0^\pi xe^{2x}\,dx = (4\pi-2)e^{2\pi} + 2\,.$$

Beim letzten Integral schließlich haben wir

$$\int_Q (2-3y\sin xy) = \int_0^4\left(\int_0^\pi (2-3y\sin xy)\,dx\right)dy\,.$$

Die partielle Ableitung von $\cos xy$ nach $x$ ist $-y\sin xy$; die Stammfunktion unseres Integranden bezüglich der Variablen $x$ ist also $2x + 3\cos xy$. Somit ist

$$\int_Q (2-3y\sin xy) = \int_0^4 (2\pi + 3\cos\pi y - 3)\,dy = (2\pi-3)y + \frac{3\sin\pi y}{\pi}\bigg|_0^4 = 8\pi - 12\,.$$

Bei der anderen Integrationsreihenfolge erhalten wir

$$\int_Q (2 - 3y \sin xy) = \int_0^\pi \left( \int_0^4 (2 - 3y \sin xy)\, dy \right) dx \,.$$

Eine Stammfunktion von $y \sin xy$ bezüglich $y$ müssen wir mit partieller Integration suchen; wir setzen $u' = \sin xy$ und $v = y$, also $u = -\dfrac{\cos xy}{x}$ und $v' = 1$. Somit ist

$$\int y \sin xy\, dy = -\frac{y}{x} \cos xy + \int \frac{\cos xy}{x}\, dy = -\frac{y}{x} \cos xy + \frac{\sin xy}{x^2}$$

und damit

$$\int_0^4 (2 - 3y \sin xy)\, dy = 2y + \frac{3y}{x} \cos xy - \frac{3 \sin xy}{x^2} \bigg|_0^4 = 8 + \frac{12 \cos 4x}{x} - \frac{3 \sin 4x}{x^2} \,.$$

Leider hat weder der zweite noch der dritte Summand eine elementar ausdrückbare Stammfunktion; daß die Ableitung von $3 \sin(4x)/x$ gerade die Summe dieser beiden Summanden ist, errät man höchstens mit viel Glück. Zumindest bei diesem letzten Beispiel hängt der Erfolg also wesentlich von der Integrationsreihenfolge ab. Das Ergebnis ist allerdings dasselbe, auch wenn wir nun ein uneigentliches Integral auswerten müssen:

$$\int_0^\pi \left( 8 + \frac{12 \cos 4x}{x} - \frac{3 \sin 4x}{x^2} \right) dx = 8x + \frac{3 \sin 4x}{x} \bigg|_0^\pi = 8\pi - 12 \,,$$

denn nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{12 \cos 4x}{1} = 12 \,.$$