WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11.-12. März 2013

a) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion, und (x_0, y_0) sei ein Punkt, in dem $F(x_0, y_0)$ verschwindet, aber $\nabla F(x_0, y_0)$ nicht der Nullvektor ist. Zeigen Sie, daß die Tangente in (x_0, y_0) an die Kurve

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$$

die durch

$$F_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$$

definierte Gerade ist!

b) $F, G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen, und (x_0, y_0) sei ein Punkt, in dem sowohl F als auch G verschwinden, nicht aber ∇F und ∇G. Zeigen Sie, daß sich die Kurven

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\} \quad \text{und} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x,y) = 0\}$$

im Punkt (x_0, y_0) genau dann berühren, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

$$\nabla F(x_0,y_0) = \lambda \nabla G(x_0,y_0)\,.$$

c) Berechnen Sie die HESSE-Matrizen der folgenden Funktionen:
$f_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad (x,y,z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ $\qquad f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \sin x \cos y$
$f_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ $\qquad f_4: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \arctan x + y$

d) Berechnen Sie die vollständige TAYLOR-Reihe von f_1 um den Punkt $(0,0,0)$!

e) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_1 um den Punkt $(1,0,0)$!

f) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_2 bis f_4 um den Nullpunkt!

g) Berechnen Sie die HESSE-Matrix der Funktion $g(x,y,z) = \sin(xy + yz + xz) + e^{2x+3y+5z}$!

h) Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome vom Grad drei um den Punkt $(0,0)$ von

$$f(x,y) = e^x \sin y \quad \text{und} \quad g(x,y) = \cos(x-y)\sin(x+y)\,!$$

i) Welche quadratische Form definiert die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

j) Welche symmetrische Matrix führt zu $Q(x,y) = (x+2y)^2$?

k) Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen positiv *bzw.* negativ definit oder indefinit sind oder keine dieser Eigenschaften haben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

l) Gegeben seien N Datenpaare (x_i, y_i), die ungefähr proportional zueinander sein sollten. Finden sie das im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate bestmögliche $a \in \mathbb{R}$, so daß $y_i \approx a x_i$ ist!

m) Gegeben seien hundert Meßwerte (x_i, t_i), wobei theoretisch ein Zusammenhang der Form

$$x_i = a \sin t_i + b \sin 2t_i + c \sin 3t_i + d \sin 4t_i$$

bestehen sollte. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dessen Lösungen im Sinne der kleinsten Quadrate die beste Schätzung für a, b, c, d liefern!

n) Wie können Sie vorgehen, wenn ein Zusammenhang der Form $x_i = A\cos(t_i + \varphi)$ zu erwarten ist?

o) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare (k, k^2), $k = 1, \ldots, 5$!

p) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare $(\sin^2 k, \cos^2 k)$, $k = 1, \ldots, 100$!