Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18–19. Februar 2013

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int e^x \cos 3x\,dx, \qquad \int x e^{-x^2}\,dx, \qquad \int x^3 e^{-x^2}\,dx, \qquad \int x \log x\,dx$$

b) Berechnen Sie mittels der Substitution $x = \log u$ das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}$!

c) Bestimmen Sie mittels der Substitution $x = \sin u$ eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$!

d) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

e) *Richtig oder falsch:* Der Graph einer Funktion $f(x,y)$ ist genau dann eine Ebene, wenn es $a,b,c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(x,y) = ax + by + c$.

f) Welche Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^3$ kann der Graph einer Funktion $f(x,y)$ enthalten?

g) Beschreiben Sie die Niveaumengen $N_a(f)$ von $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ in Abhängigkeit von a, und vergleichen Sie mit den Niveaumengen $N_g(a)$ von $g(x,y) = x^2+y^2$!

h) Was können Sie über eine Funktion sagen, deren Niveaumengen abgesehen von der einelementigen Menge $\{(0,0)\}$ allesamt Kreise um den Nullpunkt von $\mathbb{R}^2$ sind?

i) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{R}^2$?

$$\|(x,y)\|_1 = x^2+y^2, \qquad \|(x,y)\|_2 = |x+y|, \qquad \|(x,y)\|_3 = |x|+|y|$$
$$\|(x,y)\|_4 = \max(x,y), \qquad \|(x,y)\|_5 = \max(2|x|, |3y|), \qquad \|(x,y)\|_6 = \sqrt{|xy|}$$

j) Zeigen Sie, daß die Normen unter diesen Abbildungen äquivalent zur Maximumsnorm sind!

k) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche abgeschlossen?

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x,y < 2\right\}, \qquad M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x,y \le 2\right\},$$
$$M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x,y \le 2\right\},$$
$$M_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 0\right\}, \qquad M_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy \ne 0\right\},$$

l) Zeigen Sie, daß die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ wieder offen ist!

m) Stellen Sie das offene Intervall $(0,\ 1)$ dar als Vereinigung abzählbar unendlich vieler abgeschlossener Intervalle!

n) Welche der Punkte $(0,0), (1,1), (2,2), (2,1), (2,0)$ aus $\mathbb{R}^2$ sind innere Punkte der Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x|+|y| \le 2\right\}$, welche sind äußere *bzw.* Randpunkte?

o) Welche der hier definierten Folgen sind konvergent, und wohin konvergieren diese?

$$(u_n, v_n) = \left(\frac{1}{n^2+1}, \frac{2}{n^3-3}\right), \quad (x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right), \quad (w_n, z_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$$