

18. April 2013

8. Übungsblatt Analysis II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Welchen Träger hat die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \max(1 - x^2 - y^2, 0)$?
- 2) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $Q \subset \mathbb{R}^3$ ein Quader, so ist die Funktion g , die auf Q mit f übereinstimmt und sonst überall verschwindet, eine Funktion mit kompaktem Träger.
- 3) *Richtig oder falsch:* Zu jeder Funktion $f \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt es ein $x_M \in \mathbb{R}^n$, so daß $f(x_M) = \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ ist.
- 4) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt auch das Produkt fg in $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
- 5) *Richtig oder falsch:* Eine Nullmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$ hat keine Randpunkte.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seien gegeben durch $f(x, y) = \min(1 - |x|, 1 - |y|)$ und $g(x, y) = f(x, y)$, falls $f(x, y) \geq 0$ ist, aber $g(x, y) = 0$ falls $f(x, y) < 0$ ist.

- a) Berechnen Sie die Träger der beiden Funktionen, und entscheiden Sie, ob diese kompakt sind!
- b) Sind f und g stetig?
- c) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q f$!
- d) Was ist $\int_{\mathbb{R}^2} g$?
- e) Interpretieren Sie $\int_{\mathbb{R}^2} g$ geometrisch!

Aufgabe 2: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Sind $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = f(x)g(y)$ und $Q = [a, b] \times [c, d]$, so ist $\int_Q h = \left(\int_a^b f(x) dx\right) \left(\int_c^d g(y) dy\right)$!
- b) Ist auch $\int_Q h = \left(\int_a^b f(x) dx\right) \left(\int_c^d g(x) dx\right)$?
- c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = (1 - y^2)\sqrt{1 - x^2}$, und Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q f$!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

$0 < a < b$ seien reelle Zahlen, und für $x > 0$ sei $\Gamma_{a,b}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt$.

- a) Zeigen Sie, daß $\Gamma_{a,b}$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R}_{>0}$ nach \mathbb{R} ist!
- b) Zeigen Sie, daß $\Gamma_{a,b}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist mit $\Gamma_{a,b}^{(n)}(x) = \int_a^b (\ln t)^n e^{-t} t^{x-1} dt$!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 24. April 2013, um 10.10 Uhr